

## Die logarithmische Mischungsregel im Komplexen

Von W. HEYWANG und G. WINSTEL

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium  
der Siemens & Halske AG, München

(Z. Naturforschg. 19 a, 156—157 [1964]; eingeg. am 25. November 1963)

Wie sich aus der Diskussion mit mehreren Fachkollegen ergab, scheint die Anwendbarkeit der von LICHTENECKER<sup>1</sup> angegebenen logarithmischen Mischungsregel für komplexe Dielektrizitätskonstanten, Permeabilitäten usw. nicht oder nur wenig bekannt zu sein.

Im allgemeinen ist die Rechnung mit den komplexen Größen (z. B.  $\epsilon' - i\epsilon''$ ) in der üblichen einfachen Form nur für lineare Operationen zulässig; man könnte daher annehmen, daß auch die logarithmische Mischungsregel für diese Behandlungsweise ausscheidet. Aber bereits aus der LICHTENECKERSchen Ableitung folgt, daß dies nicht der Fall ist; denn die logarithmische Mischungsregel ergibt sich als Grenzwert von beliebig vielen Parallel- und Reihenschaltungen, d. h. mathematisch linearer und reziprok-linearer Operationen, für die alle die komplexe Rechnungsweise zulässig ist. Man kann also die logarithmische Mischungsregel auch im Komplexen anwenden.

Als interessanter Fall sei im folgenden die Mischung dielektrischer isolierender Bereiche (Dielektrizitätskonstante  $\epsilon'$ ) mit gut leitenden Bereichen (Leitfähigkeit  $\sigma$ ) herausgegriffen. Man erhält

$$\ln \bar{\epsilon} = \ln(\epsilon' - i\epsilon'') = (1-c) \ln \epsilon + c \ln \frac{\sigma}{i\omega} \quad (1)$$

( $\bar{\epsilon}$  komplexe mittlere Dielektrizitätskonstante,  $c$  räumlicher Anteil der leitenden Bereiche) oder durch einfache Umformung

$$\epsilon' = \frac{\epsilon^{1-c} \sigma c}{\omega^c} \cos c \frac{\pi}{2}, \quad \epsilon'' = \frac{\epsilon^{1-c} \sigma c}{\omega^c} \sin c \frac{\pi}{2}, \quad (2)$$

d. h. also der Verlustwinkel der mittleren Dielektrizitätskonstante wird frequenzunabhängig

$$\delta = c \frac{\pi}{2} = \text{const.} \quad (3)$$

Dieses Ergebnis erscheint insoweit bedeutsam, als die meisten Dielektrika in einem weiten Frequenzbereich einen konstanten Verlustwinkel aufweisen (vgl. Abb. 1). In diesem Bereich stimmt das Absinken von  $\epsilon'$  quantitativ mit dem aus Gl. (2) und Gl. (3) folgenden Zusammenhang zwischen Frequenzgang von  $\epsilon'$  und  $\tan \delta$  überein. Selbstverständlich läßt sich dieses einfache Modell durch Zufügen z. B. einer Parallelleitfähigkeit innerhalb der isolierenden Bereiche oder von Serienwiderständen noch ausweiten, so daß der Gesamtverlauf des Verlustwinkels eines Dielektrikums gut beschrieben wird; doch soll hiermit keinesfalls gesagt werden, daß ein konstanter Verlustwinkel immer auf eine Mischung

leitfähiger und isolierender Bereiche zurückzuführen ist. Es wurde vielmehr mit Hilfe der logarithmischen Mischungsregel in einfacher Form eine Lösung der CRAMERS-KRONIG-Relation abgeleitet.

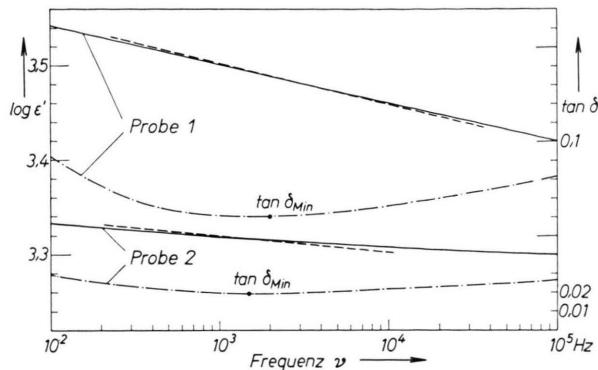


Abb. 1. Frequenzgang von  $\epsilon'$  und  $\tan \delta$  verschiedener Titanat-Dielektrika. — · —  $\tan \delta$ , — —  $\epsilon'$  (experimenteller Verlauf), — — —  $\epsilon \sim \nu^{-2\delta_{\min}/\pi}$  (theoretischer Verlauf).

Interessant ist darüber hinaus jedoch die Frage, ob dies die einzige Lösung der CRAMERS-KRONIG-Relation mit konstantem  $\tan \delta$  ist. Der Beweis für die Eindeutigkeit sei im folgenden kurz angedeutet.

Die reellen CRAMERS-KRONIG-Relationen sind bekanntlich

$$\epsilon'(\omega) - \epsilon'_\infty = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \epsilon''(x) \frac{x \, dx}{x^2 - \omega^2} \quad (4)$$

$$\text{und} \quad \epsilon''(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \epsilon'(x) \frac{\omega \, dx}{\omega^2 - x^2}. \quad (5)$$

Setzen wir  $\epsilon''/\epsilon' = \tan \delta = 1/\lambda = \text{const}$ , so folgt zunächst aus Gl. (5)

$$\epsilon''(\omega) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\infty \epsilon''(x) \frac{\omega \, dx}{\omega^2 - x^2}.$$

Diese Integralgleichung läßt sich durch die Substitution  $x = e^p$ ,  $\omega = e^q$  auf die allgemeine Form bringen:

$$f(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(q-p) f(p) \, dp. \quad (6)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha|t|} k(t) \, dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\alpha|t|} f(t))^2 \, dt$$

existieren, sind alle Lösungen von der Form

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad (\text{vgl. z. B. } ^2) \quad (7)$$

<sup>1</sup> LICHTENECKER, Phys. Z. 27, 115 [1926].

<sup>2</sup> E. C. TITCHMARCH, Theory of Fourier Transforms, Oxford 1937.



$$\text{Aus } k(q-p) = \frac{\lambda}{\pi \sinh(q-p)} \quad (8)$$

ergibt sich für  $\alpha$  die Bedingung:

$$\frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{\sinh t} dt = -1. \quad (9)$$

Hieraus folgt (vgl. z. B. <sup>3</sup>) direkt

$$\alpha = 2 \delta / \pi$$

$$\text{und } \varepsilon'' = \tan \delta \cdot \varepsilon' \sim \omega^{-2\delta/\pi}. \quad (10)$$

Diese Lösung befriedigt erwartungsgemäß auch Gl. (4) mit  $\varepsilon_\infty = 0$ , d. h. aus einem konstanten Verlustwinkel folgt unter vernünftigen Einschränkungen an den Ver-

lauf von  $\varepsilon$  notwendig ein Absinken der Dielektrizitätskonstanten proportional  $\omega^{-2\delta/\pi}$ .

Diese Relation ist für den mittleren Frequenzbereich in vielen Fällen ebenso nützlich wie die anderen, allgemein bekannten Extremgesetze:

Parallelschaltung von konstanter Kapazität und Widerstand:

$$\tan \delta \sim \frac{1}{\omega}, \quad \varepsilon' = \text{const}$$

und Reihenschaltung von konstanter Kapazität und Widerstand:

$$\tan \delta \sim \omega, \quad \varepsilon' = \frac{\text{const}}{1 + \tan^2 \delta}.$$

Herrn Dr. G. GRAU danken wir für viele anregende Diskussionen.

<sup>3</sup> W. GRÖBNER u. N. HOFREITER, Integraltafel Teil II, Springer-Verlag, Wien 1958.

## Weglängeneffekte bei Transporterscheinungen in Raumladungszonen von Germanium-Bikristallen

Von G. LANDWEHR \*

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt  
(Z. Naturforsch. **19 a**, 157–159 [1964]; eingeg. am 10. Dezember 1963)

Ein künstlich gezogener Bikristall besteht aus zwei einkristallinen Bereichen, die entlang einer Korngrenze miteinander verwachsen sind. Die Struktur eines für die hier mitgeteilten Versuche benutzten Germanium-Bikristalls, bei dem die Längssachsen der Impfkristalle in [001]-Richtung zeigten und symmetrisch um insgesamt  $20^\circ$  um eine [100]-Achse verdreht waren, ist in Abb. 1 schematisch dargestellt. Da das Ausgangsmaterial für den Bikristall p-leitend war, äußert sich die Existenz einer Korngrenze sehr drastisch in seinen elektrischen Eigenschaften, und zwar deshalb, weil sich die Korngrenze mit einer p-leitenden Raumladungszone umgibt. Der Grund für das Auftreten einer Inversionschicht soll hier nicht erörtert werden.

Das Vorhandensein einer Potentialstufe an der Korngrenze macht es möglich, die elektrischen Eigenschaften der Raumladungszone unabhängig vom Kristalläußereren zu untersuchen<sup>1</sup>. Verwendet man für die bei HALL-Effekt- und Leitfähigkeitsmessungen üblichen Sonden legierte Indium-Kontakte, die einen sperrfreien Übergang mit der p-Schicht und einen gleichrichtenden mit dem Kristallgrundmaterial bilden, so fließt beim Anlegen einer Spannung etwa an die Stromkontakte 1–2 einer Versuchsprobe nach Abb. 1 praktisch der gesamte Strom durch die defekteleitende Raumladungszone, deren Widerstand sehr viel geringer ist als derjenige des in Sperrrichtung gepolten pn-Übergangs. Auf diese Weise lassen sich mit konventionellen Mitteln die galvano-

magnetischen Eigenschaften<sup>2</sup> der Inversionsschicht von Bikristallen über einen großen Temperaturbereich (1,25 bis 250 °K) messen. Eine Analyse<sup>3</sup> von Tieftemperatur-Daten führte zu dem Schluß, daß die Beweglichkeit der Defektelektronen offenbar durch Weglängeneffekte beeinflußt wird. Damit sind Effekte gemeint, die dann

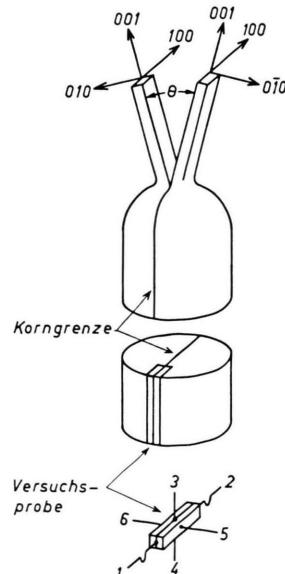


Abb. 1. Schematische Darstellung eines Germanium-Bikristalls mit einem Verdrehungswinkel  $\Theta = 20^\circ$ . Weiterhin ist die Art der benutzten Versuchspuren skizziert. Es bedeuten: 1–2: Stromkontakte, 3–4: HALL-Kontakte, 5–6: Feldeffektsonden.

<sup>2</sup> G. LANDWEHR u. P. HANDLER, J. Phys. Chem. Solids **23**, 891 [1962].

<sup>3</sup> G. LANDWEHR, phys. stat. solid. **3**, 440 [1963].

\* Braunschweig.

<sup>1</sup> B. REED, O. WEINREICH u. H. F. MATARÉ, Phys. Rev. **113**, 454 [1959].